

Krzysztof MUSIOŁ, Michał GRZENIK, Marian KAMPIK  
 Politechnika Śląska  
 Katedra Metrologii, Elektroniki i Automatyki

## ZALEŻNOŚCI PRZYBLIŻONE W OCENIE SPÓJNOŚCI ILORAZOWYCH UKŁADÓW KOMPARACJI IMPEDANCJI

W artykule poruszono problem sprawdzania ilorazowych układów komparacji wzorców impedancji w oparciu o tzw. trójkąty metrologiczne. W pracy wykazano, że stosowanie równań uproszczonych w ocenie spójności może prowadzić do znacznych błędów w szacowaniu poziomu spójności dla układów komparacji wzorców o różniących się modułach impedancji.

**Słowa kluczowe:** komparator impedancji, spójność pomiarowa, trójkąty metrologiczne, wzorzec impedancji

### SIMPLIFIED FORMULAS IN CONSISTENCY CHECKING OF RATIO IMPEDANCE COMPARATOR BRIDGES

A problem connected with checking of differential and ratio comparator bridges using so called “triangle method” is presented in the paper. It is proved that the use of simplified formulas leads to significant errors in consistency assessment in the case of comparison of unequal impedance moduli.

**Keywords:** impedance comparator bridge, consistency check, metrological triangles, impedance standard

## 1. WPROWADZENIE

W krajowych instytutach metrologicznych do pomiarów impedancji na najwyższym poziomie dokładności stosowane są metody bezpośredniego porównania ze wzorcem odniesienia. Powszechnie stosowane są mostki prądu przemiennego, wśród których można wyróżnić układy różnicowe o sygnale wyjściowym zależnym od różnicy impedancji porównywanych wzorców [1, 2] i układy ilorazowe (inaczej: stosunkowe), gdzie w wyniku pomiaru otrzymuje się iloraz komparowanych impedancji [3, 4]. W praktyce dominują układy stosunkowe, zwłaszcza, że w ostatnich latach – ze względu na rozwój cyfrowych i kwantowych źródeł napięcia przemiennego – nastąpił powrót do idei komparatora w jego podstawowej konfiguracji z dwoma źródłami napięcia. Niewątpliwą zaletą układów stosunkowych jest możliwość komparacji zarówno wzorców tego samego typu (ang. *like impedances*), jak i różnych typów (ang. *unlike impedances*).

Walidację nowo projektowanych układów komparacji impedancji przeprowadzić można przy użyciu dwóch wzorców o dokładnie znanych parametrach, np. wyznaczonych na drodze komparacji z wzorcem kwantowym. Druga z metod bazuje na trójkątach metrologicznych. Wymaga ona użycia nie dwóch, lecz trzech wzorców, przy czym nie wymaga się tutaj znajomości rzeczywistych wartości impedancji wzorców. Stanowi to istotną zaletę tej metody badań.

W przypadku ilorazowej komparacji grupy trzech wzorców o impedancjach  $z_1$ ,  $z_2$  i  $z_3$  otrzymuje się następujące ilorazy:

$$r_{12} = \frac{1}{r_{21}} = \frac{z_1}{z_2}, \quad (1)$$

$$r_{23} = \frac{1}{r_{32}} = \frac{z_2}{z_3}, \quad (2)$$

$$r_{31} = \frac{1}{r_{13}} = \frac{z_3}{z_1}, \quad (3)$$

W przypadku idealnego układu pomiarowego (albo w przypadku symulacji przy użyciu liczb dokładnych) iloczyn trzech powyższych ilorazów daje jedność:

$$r_{12} \cdot r_{23} \cdot r_{31} = 1. \quad (4)$$

W praktyce pomiarowej powyższy iloczyn różni się od jedności. Poziomą spójność  $\lambda$  można w tym przypadku wyrazić równaniem:

$$\lambda = r_{12} \cdot r_{23} \cdot r_{31} - 1, \quad (5)$$

Dzieląc równanie (4) kolejno przez stosunki:  $r_{12}$ ,  $r_{23}$  i  $r_{31}$  otrzymuje się trzy równania tożsame z równaniem (4):

$$r_{23} \cdot r_{31} - r_{21} = 0, \quad (6)$$

$$r_{12} \cdot r_{31} - r_{32} = 0, \quad (7)$$

$$r_{12} \cdot r_{23} - r_{13} = 0, \quad (8)$$

Jeśli dla sprawdzenia spójności komparatora stosunkowego wykorzystana się wzorce tego samego typu o jednakowych wartościach nominalnych (tzn.  $r_{12} \approx r_{21} \approx r_{23} \approx r_{32} \approx r_{13} \approx r_{31} \approx 1$ ), to do oszacowania poziomu spójności można wykorzystać równania (6)÷(8), ponieważ:

$$\lambda_1 = r_{23} \cdot r_{31} - r_{21} \approx \lambda, \quad (9)$$

$$\lambda_2 = r_{12} \cdot r_{31} - r_{32} \approx \lambda, \quad (10)$$

$$\lambda_3 = r_{12} \cdot r_{23} - r_{13} \approx \lambda, \quad (11)$$

W przypadku ilorazowej komparacji impedancji wyniki porównań opisane równaniami (1) ÷ (3) są liczbami zespolonymi:  $r_{12} = |r_{12}| \cdot e^{j\varphi_1}$ ,  $r_{23} = |r_{23}| \cdot e^{j\varphi_2}$ ,  $r_{31} = |r_{31}| \cdot e^{j\varphi_3}$ , zatem również  $\lambda$  jest liczbą zespoloną. Liczba ta zapisana w postaci wykładniczej:

$$\lambda = |r_{12}| \cdot |r_{23}| \cdot |r_{31}| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)} - 1e^{j0} \quad (12)$$

zawiera informację o modułowym  $|\lambda_m|$  i fazowym  $\lambda_f$  poziomie spójności wyników, zdefiniowanym następująco:

$$\lambda_m = |r_{12}| \cdot |r_{23}| \cdot |r_{31}| - 1 \quad (13)$$

$$\lambda_f = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad (14)$$

Warto nadmienić, iż  $\lambda_m$  i  $\lambda_f$  nie są modułem i fazą wypadkowego wektora spójności  $\lambda$ , gdyż:

$$\lambda = |\lambda| \cdot e^{j\varphi} \neq \lambda_m \cdot e^{j\lambda_f}. \quad (15)$$

Moduł  $|\lambda|$  i faza  $\varphi$  wypadkowego wektora spójności  $\lambda$  nie wskazują wprost na źródło niespójności wyników. Podobny problem z wnioskowaniem o źródłach niespójności występuje, gdy przedstawimy spójność w postaci arytmetycznej:  $\lambda = \text{Re}\{\lambda\} + j\text{Im}\{\lambda\}$ . Z praktycznego punktu widzenia wydaje się więc uzasadnione stosowanie w ocenie spójności zależności (13) i (14). Wyznaczanie niezależnie różnicy modułów i faz jest korzystne z punktu widzenia wnioskowania o źródłach błędów w układzie pomiarowym i ich późniejszej eliminacji.

## 2. KOMPARACJA WZORCÓW O JEDNAKOWYCH WARTOŚCIACH NOMINALNYCH

W przypadku badania układów komparacji za pomocą wzorców tego samego typu o jednakowych wartościach nominalnych błąd oszacowania poziomu spójności wynikający z zastosowania równań przybliżonych (9÷11) zależy od rozrzutu wartości rzeczywistych wzorców wykorzystanych w teście.

Można wykazać, że względny błąd graniczny, spowodowany zastosowaniem równań przybliżonych (9÷11) zamiast równania ściślego (5) jest w przybliżeniu dwukrotnie większy od błędu pojedynczego wzorca. Przyjmując jednostajny rozkład prawdopodobieństwa dla błędu oszacowania poziomu spójności wzorca związana z tym błędem niepewność typu B ma wartość ok. 0,12%. W rzeczywistych układach komparacji wartość ta jest zwykle kilkukrotnie mniejsza od niepewności typu A poziomu spójności  $\lambda$ , wyznaczanej eksperymentalnie przez wielokrotne powtórzenie procedury komparacji [4].

### 3. KOMPARACJA WZORCÓW O RÓŻNYCH WARTOŚCIACH NOMINALNYCH

Istotne rozbieżności poziomu spójności wyznaczonego na podstawie zależności (5) i zależności (9÷11) mogą pojawić się w przypadku komparacji obiektów o nominalnie różnych wartościach. W pomiarach ilorazowych sytuacja taka występuje bardzo często. Przykładem może być kalibracja wzorców impedancji różnego typu<sup>1</sup> (*ang. unlike impedances*) przy użyciu komparatora stosunkowego. W tym przypadku warunek równości wartości impedancji wzorców zazwyczaj nie jest spełniony. W celu zobrazowania rozbieżności w ocenie spójności przy wykorzystaniu zależności przybliżonych rozważono symulacyjnie przypadek komparacji impedancji różnego typu. W badaniach symulacyjnych wykorzystano parametry rzeczywistych wzorców powszechnie używanych w Krajowych Instytutach Metrologicznych. Do badań wybrano następujące wzorce impedancji:

- 1) wzorzec rezystancji Tinsley 5685B;  $R_n=1 \text{ k}\Omega$ ,
- 2) wzorzec pojemności 1409-T;  $C_n=0,1 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $D=0,0002$  (przy  $f=1 \text{ kHz}$ ),
- 3) wzorzec indukcyjności własnej GenRad 1482-L;  $L_n=100 \text{ mH}$ ,  $R_s=81 \text{ }\Omega$ .

Biorąc pod uwagę parametry wzorców wyznaczono ich impedancje zespolone dla czterech wybranych częstotliwości z przedziału od 200 do 1592 Hz. Dla powszechnej w kalibracjach wzorców impedancji wartości częstotliwości równej 1592 Hz moduły impedancji wszystkich trzech obiektów są zbliżone do siebie (Tabela 1). Przez zmianę częstotliwości wprowadzono zróżnicowanie modułów impedancji wzorców. Wraz ze zmniejszaniem się częstotliwości obserwuje się zwiększenie rozbieżności pomiędzy modułami porównywanych wzorców, a co z tym idzie moduły stosunków  $r_{12}$ ,  $r_{23}$ ,  $r_{31}$ , znacznie odbiegają od jedności.

Następnie wyznaczono zespolone stosunki impedancji zgodnie z zależnościami (1÷3). W komparacji RC celowo wprowadzono błąd pomiaru przez dodanie rezystancji szeregowej o wartości 10 m $\Omega$ . W efekcie wartość oczekiwana (poprawna) modułowego poziomu spójności  $\lambda_m$  wynosi 10ppm, a wartość poprawna fazowego poziomu spójności  $\lambda_f$  wynosi zero.

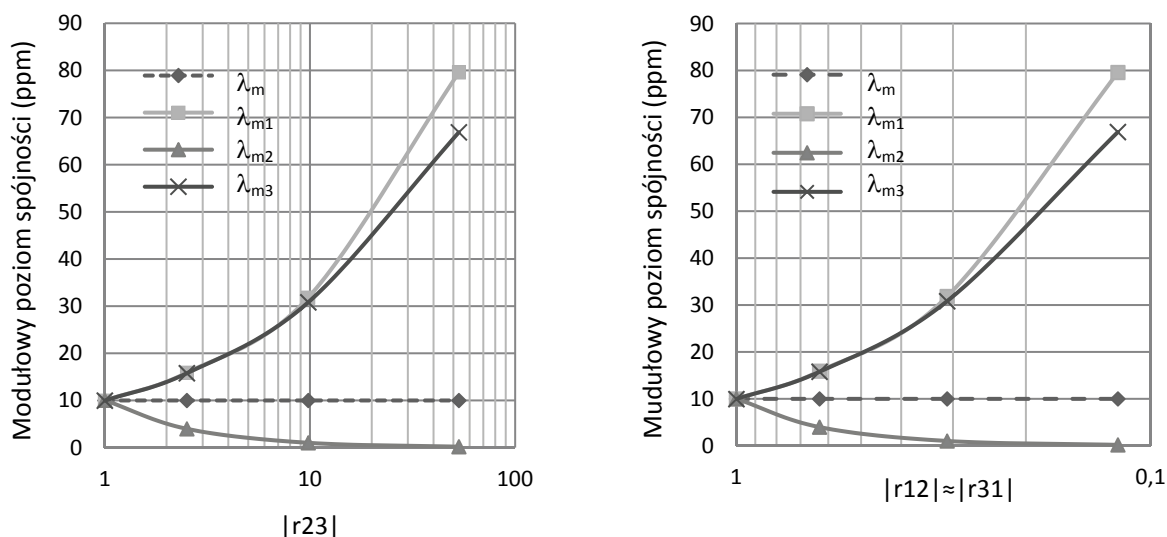
Ostatecznie wyznaczono zespolone poziomy spójności  $\lambda$  (równanie 5) oraz poziomy  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  (równania 9÷11) i obliczono ich moduły. Końcowe wyniki badań spójności zamieszczono w dolnej części Tabeli 1.

Tabela 1  
Symulacyjne wyniki badań poziomu spójności

	$f=1592 \text{ Hz}$	$f=1000 \text{ Hz}$	$f=500 \text{ Hz}$	$f=200 \text{ Hz}$
$z_1, (\Omega)$	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00
$z_2, (\Omega)$	0,199943+999,716i	0,318309+1591,54i	0,636619+3183,09i	1,59154+7957,74i
$z_3, (\Omega)$	81,0000+1000,28i	81,0000+628,318i	81,0000+314,159i	81,0000+125,663i
$\lambda_m (\times 10^{-6})$	10,00	10,00	10,00	10,00
$\lambda_{m1} (\times 10^{-6})$	9,99	15,91	31,83	79,57
$\lambda_{m2} (\times 10^{-6})$	10,04	3,98	1,02	0,19
$\lambda_{m3} (\times 10^{-6})$	9,96	15,78	30,82	66,88
$\lambda_f$	0	0	0	0

<sup>1</sup> np. wzorca pojemności z wzorcem indukcyjności lub rezystancji

Ponadto na rys. 1 przedstawiono zależność modułowego poziomu spójności od modułów stosunków porównywanych impedancji.



Rys. 1. Wpływ zmiany modułów stosunków porównywanych impedancji na modułowy poziom spójności

#### 4. PODSUMOWANIE

Zgodnie z oczekiwaniami dla każdej analizowanej częstotliwości otrzymano poprawną wartość modułowego poziomu spójności  $\lambda_m = 10$  ppm wyznaczoną z równania ścisłego (5). Ponadto, w przypadku komparacji impedancji o zbliżonych modułach ( $f=1592$  Hz) nie zaobserwowano znaczących różnic w poziomach spójności wyznaczanych z równania głównego i równań przybliżonych. Natomiast w przypadku komparacji impedancji o różniących się modułach występują istotne błędy w ocenie spójności wyników przy wykorzystaniu równań przybliżonych (9÷11). Błędy te mogą mieć znak zarówno dodatni, jak i ujemny (rys. 1) w zależności od zastosowanego równania przybliżonego. Przy komparacji wzorców o modułach różniących się o jeden rząd wielkości błąd oszacowania modułowego poziomu spójności wynikający z zastosowania równania przybliżonego może wynosić nawet kilkaset %.

Należy podkreślić, iż analizowany powyżej układ jest spójny fazowo. Fazowy poziom spójności  $\lambda_f$  jest równy zero niezależnie od stosunku modułów porównywanych impedancji. Wynika to z definicji i przyjętych założeń symulacyjnych (dodanie „czystej” rezystancji w komparacji RC)

#### LITERATURA

1. Musioł K., Met A., Skubis T., Automatic Bridge for Comparison of Inductance Standards, Measurement, Volume 43, Issue 10, December 2010, pp. 1661 – 1667.
2. Musioł K., Skubis T.: The use of 1:1 comparator bridge for 10:1 and 1:10 inductance standard transfer. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 63, Issue: 12, 2014, pp. 3019-3026.
3. Callegaro L., D’Elia V., Kampik M., Kim D., Ortolano M., Pourdanesh F., Experiences with a Two-Terminal-Pair Digital Impedance Bridge, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 64, no. 6, June 2015.
4. Musioł K., Kampik M., Grzenik M., Barwinek W.: ”Consistency check of RLC Bridge Based on Synchronous Sampling System”, Proc. of Conference „Problems and Progress in Metrology, Proc. of Metrology Commission of Katowice, Branch of Polish Academy of Sciences, Series: Conferences No. 21, Szczyrk, Poland 05-08 June 2016, pp. 48 – 51.