

Jacek PUCHALSKI, Paweł FOTOWICZ
Główny Urząd Miar

PROPAGACJA NIEPEWNOŚCI PRZY WYZNACZANIU OBSZARU ROZSZERZENIA TRÓJWYMIAROWEGO MENZURANDU WEKTOROWEGO

Propagacja niepewności to podstawowa metoda obliczania obszaru rozszerzenia dla menzurandu wektorowego, opisywanego wielowymiarowym modelem pomiaru, zalecana przez międzynarodowy dokument JCGM 102 (Supplement 2 to the Guide). Obszar ten wyznaczany jest przy użyciu rachunku macierzowego. W referacie przedstawiono obliczenia dla trójwymiarowego modelu pomiaru, będące rozwinięciem podejścia zalecanego w powyższym dokumencie.

Słowa kluczowe: propagacja niepewności, obszar pokrycia, menzurand wektorowy.

UNCERTAINTY PROPAGATION IN DETERMINING OF COVERAGE REGION FOR THREE-DIMENSIONAL VECTOR MEASURAND

The calculation of the coverage region associated with the three-dimensional vector measurand is based on the uncertainty propagation by the measurement covariance matrix. The method is recommended for explicit multivariate measurement models by the international document JCGM 102 associated with evaluation of measurement data. The measure of uncertainty associated with the vector measurand is a hyper-ellipsoidal coverage region. The coverage region is an extended case with the reference to the approach for calculating the coverage interval, when the scalar output quantity is represented by a univariate measurement function. The coverage region represents the uncertainty of vector output quantity defined by multivariate measurement function.

Keywords: uncertainty propagation, coverage region, vector measurand.

1. WSTĘP

Dokument [1], opracowany przez Wspólny Komitet ds. Przewodników w Metrologii, zaleca obliczenia niepewności pomiaru dla modeli wielowymiarowych metodą propagacji przy wykorzystaniu rachunku macierzowego. Najprostszymi przypadkami takich obliczeń dla modelu dwuwymiarowego został przedstawiony w [2]. Poniżej omówiono postępowanie w sytuacji zastosowania modelu trójwymiarowego.

2. PROPAGACJA NIEPEWNOŚCI

Propagacja niepewności jest uogólnieniem prawa propagacji niepewności stosowanego w dziedzinie jednowymiarowych modeli pomiaru. Opiera się na rachunku macierzowym. Dla jawnych wielowymiarowych modeli pomiaru polega na określeniu relacji pomiędzy wektorową wielkością wyjściową $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$, a wektorową wielkością wejściową $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ w postaci $\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$, gdzie $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$ jest wielowymiarową funkcją pomiaru. Z estymatą $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ wektorowej wielkości wejściowej związana jest macierz kowariancji, o wymiarze $N \times N$, par składowych tej estymaty:

$$\mathbf{U}_x = \begin{bmatrix} u(x_1, x_1) & \cdots & u(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x) & \cdots & u(x_N, x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2(x_1) & \cdots & u(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x) & \cdots & u^2(x_N) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdź $u(x_i, x_i) = u^2(x_i)$ jest wariancją związaną ze składową x_i , a $u(x_i, x_j)$ jest kowariancją związaną ze składowymi x_i i x_j . Gdy wielkości są nieskorelowane to $u(x_i, x_j) = 0$.

Dla estymaty \mathbf{x} wielkości X estymata wielkości Y dana jest zależnością $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, a macierz kowariancji o wymiarze $m \times m$, związana z estymatą \mathbf{y} , obliczana jest na podstawie macierzewego równania propagacji niepewności [1]:

$$\mathbf{U}_y = \mathbf{C}_x \mathbf{U}_x \mathbf{C}_x^T \quad (2)$$

gdzie \mathbf{C}_x to macierz współczynników wrażliwości.

3. OBSZAR ROZSZERZENIA DLA WEKTOROWEJ WIELKOŚCI WYJŚCIOWEJ

Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego dla wielowymiarowych wielkości wyjściowych o m składowych jest określona dla współrzędnej wielkości wyjściowej $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)^T$ jako:

$$g(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \cdot \sqrt{\det(\mathbf{U}_y)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y})^T \cdot \mathbf{U}_y^{-1} \cdot (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y})\right) \quad (3)$$

Obszar rozszerzenia jest zdefiniowany przez wnętrze i obszar graniczny określony dla stałej wartości gęstości prawdopodobieństwa tj.

$$g(\boldsymbol{\eta}) = \text{const} = H \quad (4)$$

gdzie H - gęstość prawdopodobieństwa na granicy obszaru rozszerzenia, co oznacza stałą wartość wielkości w wykładniku potęgi liczby Eulera e . Warunek ten oznacza, że odległość znana z literatury jako odległość Mahalonobisa, przyjmuje wartość stałą tj.

$$\sqrt{(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y})^T \cdot \mathbf{U}_y^{-1} \cdot (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y})} = k_p \quad (5)$$

$$\text{tj. } k_p = -2 \ln \left((2\pi)^{\frac{m}{2}} \cdot \sqrt{\det(\mathbf{U}_y)} H \right).$$

W ogólności przyjmuje się, że obszar rozszerzenia jest określony w postaci hiperelipsy (elipsy wielowymiarowej) o liczbie wymiarów m , która opisana jest zależnością [1]:

$$(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y})^T \mathbf{U}_y^{-1} (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}) = k_p^2, \quad (6)$$

gdzie k_p jest współczynnikiem rozszerzenia.

Można pokazać, że powyższa forma kwadratowa w przypadku trójwymiarowym daje się przedstawić w postaci elipsoidy, która jest opisana we współrzędnych kartezjańskich, wyznaczonych przez osie główne, poprzez równanie:

$$\frac{\rho_{x_1}^2}{a^2} + \frac{\rho_{x_2}^2}{b^2} + \frac{\rho_{x_3}^2}{c^2} = 1 \quad (7)$$

gdzie a, b, c są odpowiednio półosiami elipsoidy.

Współczynnik k_p w ogólności jest odległością Mahalanobisa, w przypadku jedno wymiarowym jest współczynnikiem rozszerzenia, a dla przypadku wielowymiarowego współczynnikiem skalowania obszaru rozszerzenia w celu uzyskania odpowiedniego prawdopodobieństwa, obszaru ufności.

Dla układu trójwymiarowego (kiedy obszar rozszerzenia stanowi elipsoida o półosiach, określonych w następnej sekcji) prawdopodobieństwo dla obszaru rozszerzenia w postaci elipsoidy jest określone jako:

$$\mathbb{P}(k_p) = \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot k_p}{2}\right) - \frac{2 \cdot k_p \cdot e^{-\frac{k_p^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \quad (8)$$

gdzie $\operatorname{erf}()$ funkcja błędu Gaussa. Dla $k_p=2,8$ $\mathbb{P}(2,8) \approx 0,95$.

4. OBSZAR ROZSZERZENIA DLA TRÓJWYMIAROWEGO MENZURANDU WEKTOROWEGO

Dla trójwymiarowego mierzandru wektorowego macierz kowariancji wielkości wyjściowych ma postać:

$$\mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} u(y_1, y_1) & u(y_1, y_2) & u(y_1, y_3) \\ u(y_2, y_1) & u(y_2, y_2) & u(y_2, y_3) \\ u(y_3, y_1) & u(y_3, y_2) & u(y_3, y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2(y_1) & p \cdot u(y_1) \cdot u(y_2) & q \cdot u(y_1) \cdot u(y_3) \\ p \cdot u(y_2) \cdot u(y_1) & u^2(y_2) & r \cdot u(y_2) \cdot u(y_3) \\ q \cdot u(y_3) \cdot u(y_1) & r \cdot u(y_3) \cdot u(y_2) & u^2(y_3) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

gdzie: $-1 \leq p \leq 1$, $-1 \leq q \leq 1$, $-1 \leq r \leq 1$ to współczynniki korelacji. Wyznacznik macierzy wynosi:

$$\det \mathbf{U}_y = w \cdot u^2(y_1) \cdot u^2(y_2) \cdot u^2(y_3), \quad (10)$$

gdzie parametr $w=1-p^2-q^2-r^2+2 \cdot p \cdot q \cdot r$ spełnia zależność $-4 \leq w \leq 1$. Macierz odwrotna ma postać:

$$\mathbf{U}_y^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-r^2}{w \cdot u^2(y_1)} & \frac{q \cdot r - p}{w \cdot u(y_1) \cdot u(y_2)} & \frac{p \cdot r - q}{w \cdot u(y_1) \cdot u(y_3)} \\ \frac{q \cdot r - p}{w \cdot u(y_1) \cdot u(y_2)} & \frac{1-q^2}{w \cdot u^2(y_2)} & \frac{p \cdot q - r}{w \cdot u(y_2) \cdot u(y_3)} \\ \frac{p \cdot r - q}{w \cdot u(y_1) \cdot u(y_3)} & \frac{p \cdot q - r}{w \cdot u(y_2) \cdot u(y_3)} & \frac{1-p^2}{w \cdot u^2(y_3)} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

Równanie (6) po diagonalizacji odwrotnej macierzy do macierzy kowariancji w ogólności prowadzi do równania elipsoidy obrotowej, gdzie półosie a , b i c są określone jako $a^2=k_p^2/\lambda_1$, $b^2=k_p^2/\lambda_2$ i $c^2=k_p^2/\lambda_3$, a dodatnio określone wartości własne spełniają równanie charakterystyczne dla λ :

$$\det[\mathbf{U}_y^{-1} - \lambda \cdot \mathbf{I}] = 0, \quad (12)$$

gdzie \mathbf{I} to macierz jednostkowa. Wprowadzając oznaczenia $s=u^2(y_1) \cdot u^2(y_2)$, $t=u^2(y_2) \cdot u^2(y_3)$, $v=u^2(y_1) \cdot u^2(y_3)$ oraz $\varepsilon=\operatorname{tr}(\mathbf{U}_y^{-1})=[(1-p^2) \cdot s+(1-r^2) \cdot t+(1-q^2) \cdot v]/(w \cdot (s \cdot t \cdot v)^{1/2})$ i $K=(s \cdot t + s \cdot v + t \cdot v)/(w \cdot s \cdot t \cdot v)$, a także $L=1/(w \cdot (s \cdot t \cdot v)^{1/2})$ możemy równanie na wartości własne zapisać w postaci:

$$\lambda^3 - \lambda^2 \cdot \varepsilon + \lambda \cdot K - L = 0 \quad (13)$$

Sprowadzając powyższe równanie trzeciego stopnia do postaci kanonicznej stosujemy podstawienie:

$$\lambda = v + \frac{\varepsilon}{3} \quad (14)$$

i otrzymujemy równanie w postaci:

$$v^3 - P \cdot v + Q = 0, \quad (15)$$

gdzie $P=K-\varepsilon^2/3$ i $Q=\varepsilon K/3-L-2 \cdot \varepsilon^3/27$. Równanie powyższe posiada rozwiązanie w postaci trzech różnych pierwiastków rzeczywistych, jeśli $\Delta < 0$ (koniecznie $P < 0$), gdzie:

$$\Delta = \frac{P^3}{27} + \frac{Q^3}{4}, \quad (16)$$

które określone są równaniami:

$$v_k = 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos \frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{3}, \quad \cos \varphi = \frac{\frac{-Q}{2}}{\sqrt{\frac{-P^3}{27}}}, \quad (17)$$

gdzie: $k=0,1,2$ i $0 < \varphi < \pi$. W rezultacie wartości własne są wyznaczane następująco:

$$\lambda_k = \frac{\varepsilon}{3} + 2\sqrt{\frac{\frac{\varepsilon^2}{3} - K}{3}} \cdot \cos \frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{3}. \quad (18)$$

Szczególny przypadek mamy gdy $\Delta=0$. Wówczas elipsoida przybiera kształt cygara - elipsoidy obrotowej z charakterystycznymi dwoma jednakowymi osiami (ma to miejsce gdy $u(y_1) = u(y_2) = u(y_3)$ i $|p|=|q|=|r|$):

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon}{3} - 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \quad \text{i} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\frac{-P}{3}}. \quad (19)$$

Obszar rozszerzenia dla wielkości trójwymiarowej ma kształt elipsoidy dla $w > 0$,

$$p^2 + q^2 + r^2 \leq 1 + 2 \cdot p \cdot q + r \quad (20)$$

gdyż równanie (13) posiada trzy różne dodatnie pierwiastki rzeczywiste, odpowiadające półosiom elipsoidy, których długości określono poniżej:

$$a^2 = k_p^2 / \left(\frac{\varepsilon}{3} + 2\sqrt{\frac{\frac{\varepsilon^2}{3} - K}{3}} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \right), \quad (21)$$

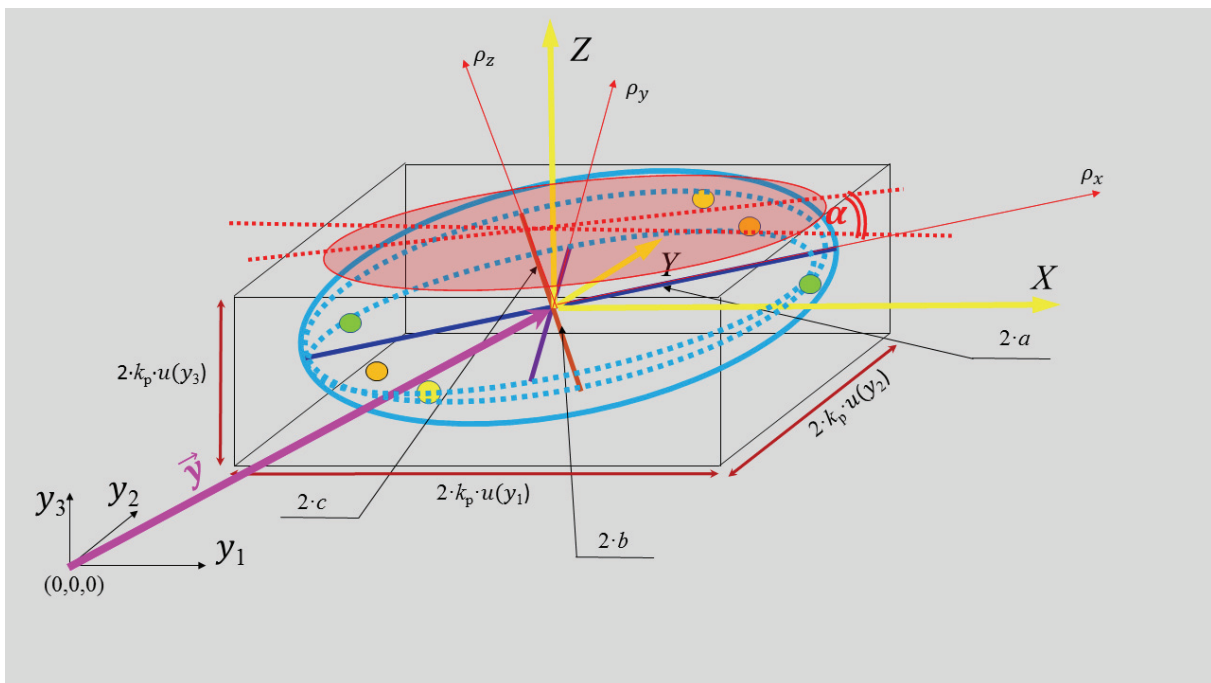
$$b^2 = k_p^2 / \left(\frac{\varepsilon}{3} + 2\sqrt{\frac{\frac{\varepsilon^2}{3} - K}{3}} \cdot \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} \right), \quad (22)$$

$$c^2 = k_p^2 / \left(\frac{\varepsilon}{3} + 2 \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon^2}{3} - K}{3} \cdot \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3}} \right), \quad (23)$$

gdzie:

$$\cos \varphi = \frac{w \cdot L + \frac{2\varepsilon^3}{27} - \frac{K \cdot \varepsilon}{3}}{\sqrt{\frac{(\frac{\varepsilon^2}{3} - K)^3}{27}}}. \quad (24)$$

Graficznie obszar rozszerzenia przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Obszar rozszerzenia w postaci elipsoidy z punktami charakterystycznymi rzutem eliptycznym na płaszczyznę XOY

Rzuty prostokątne elipsoidy na ściany boczne opisanego na elipsoidzie prostopadłościanu tworzą elipsy wyznaczone przez punkty styczności ze ścianami prostopadłymi do ściany bocznej. Kontur elipsy jest jednocześnie obwiednią wyznaczoną przez wszystkie rzutowane na tę ścianę przekroje poprzeczne elipsoidy równoległe do płaszczyzny ściany, na którą wykonano rzut. Kąt nachylenia osi elipsy α dla wybranej płaszczyzny rzutu np. XOY, do osi OX określa się tak samo jak przypadku dwuwymiarowego, tj. dwu skorelowanych zmiennych z niepewnościami odpowiednio $u(y_1)$, $u(y_2)$ i współczynnikiem korelacji odpowiednio p :

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{2p u(y_1)u(y_2)}{u^2(y_1) - u^2(y_2)} \quad (25)$$

5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Zakładamy następujące zależności wielkości wyjściowych y_1, y_2, y_3 jako funkcję wielkości wejściowych x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{cases} y_1 = 2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\ y_2 = x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 + 2 \cdot x_4 \\ y_3 = 2 \cdot x_3 \end{cases} \quad (26)$$

Zatem macierze: współczynników wrażliwości C_x [3x4], przyjętych wartości nieskorelowanych niepewności wejściowych oraz kowariancji dla zmiennych wyjściowych są następujące:

$$C_x = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_x = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^2 \end{bmatrix}, \quad U = C_x \cdot U_x \cdot C_x^T = \begin{bmatrix} 36 & 26 & 16 \\ 26 & 25 & 8 \\ 16 & 8 & 16 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Standardowe niepewności wielkości wyjściowych określone na diagonal wynoszą U jako: $u(y_1)=6$, $u(y_2)=5$ and $u(y_3)=4$, a współczynniki korelacji dla macierzy U : $p=13/15$, $q=2/3$ and $r=2/5$.

Wyznaczając parametr $w = 1 - (13/15)^2 - (2/3)^2 - (2/5)^2 + 2 \cdot (13/15) \cdot (2/3) \cdot (2/5) = 1 - 201/15^2 = 24/225 = 8/75 > 0$ macierz odwrotną do macierzy kowariancji zapisujemy w postaci:

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{24} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{7}{48} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Dla $w > 0$ mamy trzy dodatnie pierwiastki stanowiące wartości własne, które wynoszą $\lambda_1=0,468986025$, $\lambda_2=0,01574096$ and $\lambda_3=0,088189686$. Zaś półosie główne dla 95% obszaru rozszerzenia, tj. $k_p = 2,80$: $a = 4,089$, $b = 22,317$ i $c = 9,429$ oraz kąty nachylenia osi rzutów eliptycznych dla poszczególnych płaszczyzn wynoszą: $\alpha_1=35,3^\circ$, $\alpha_2=29,0^\circ$ i $\alpha_3=30,3^\circ$.

Wyznaczono również wektory własne wyznaczające kierunki osi głównych: $T_1 = [0,66917234; -0,6148118; -0,4173905]$, $T_2 = [0,742645508; 0,57309513; 0,346467346]$, i $T_3 = [0,026192239; -0,541819535; 0,840086637]$.

Skorzystano z formuł na znormalizowane wektory własne T_i dla wartości własnych λ_i dla $i=1,2,3$ które spełniają równanie na wektory własne:

$$U_y^{-1} T_i = \lambda_i T_i \quad (29)$$

$$\text{tj.} \quad \begin{bmatrix} A - \lambda_i & D & E \\ D & B - \lambda_i & F \\ E & F & C - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{y1i} \\ T_{y2i} \\ T_{y3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

opisane formułą:

$$T_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{D \cdot E + F \cdot (\lambda_i - A)}{D \cdot F + E \cdot (\lambda_i - B)}\right)^2 + \left(\frac{D \cdot E + F \cdot (\lambda_i - A)}{E \cdot F + D \cdot (\lambda_i - C)}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{D \cdot E + F \cdot (\lambda_i - A)}{D \cdot F + E \cdot (\lambda_i - B)} \\ \frac{D \cdot E + F \cdot (\lambda_i - A)}{E \cdot F + D \cdot (\lambda_i - C)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

gdzie oznaczono: $A = U_{Y11}^{-1}$; $B = U_{Y22}^{-1}$; $C = U_{Y33}^{-1}$; $D = U_{Y12}^{-1}$; $E = U_{Y13}^{-1}$ i $F = U_{Y23}^{-1}$.

6. PODSUMOWANIE

Współczesne podejście w dziedzinie opracowania danych pomiarowych preferuje probabilistyczny sposób ich opracowania, w oparciu o rachunek zmiennych losowych [1]. Obliczenia można wykonywać przy wykorzystaniu metody propagacji niepewności w oparciu o rachunek macierzowy. Preferowanym wówczas sposobem wyrażania niepewności jest obszar rozszerzenia w postaci hiperelipsy m -wymiarowej. W przypadku dwuwymiarowych modeli pomiaru będzie to postać elipsy, a w przypadku trójwymiarowego modelu to postać elipsoidy. Jeśli zmienne losowe są nieskorelowane i mają rozkład normalny to elipsoida ma osie główne zgodne z kierunkami wyznaczonymi przez zmienne wyjściowe. Będzie to kula po odpowiednim przeskalowaniu.

LITERATURA

1. Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities. JCGM 102:2011.
2. P. Fotowicz: Coverage region for the bidimensional vector measurand. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 550. Automation 2017: Innovations in Automation, Robotics and Measurement Techniques. Springer International Publishing AG 2017, s. 401-407