

Emil BURCON
Główny Urząd Miar
Samodzielne Laboratorium Termometrii

PROPAGACJA NIEPEWNOŚCI W POMIARACH TEMPERATURY

Laboratoria akredytowane, wzorcując czujniki temperatury, wyznaczają niepewność pomiaru temperatury w punktach stałych lub w wybranych punktach pomiarowych. Klient potrzebuje jednak danych dotyczących niepewności w całym zakresie temperatur roboczych, znajdujących się również pomiędzy punktami stałymi lub punktami pomiarowymi. Niepewności uzyskane w czasie wzorcowania nie mogą być jednak bezpośrednio przeniesione na wyniki pomiarów wykonywanych w temperaturach pracy czujników.

Słowa kluczowe: propagacja, temperatura, niepewność pomiaru, wielomian

PROPAGATION OF UNCERTAINTY IN TEMPERATURE MEASUREMENTS

Accredited laboratories, calibrating temperature sensors, determine the uncertainty of temperature measurement at fixed points or at selected measuring points. The customer, however, needs data on the uncertainty in the entire range of operating temperatures, also between fixed points or measuring points. The uncertainties obtained during the calibration cannot, however, be directly transferred to the results of measurements performed at the sensor operating temperatures.

Keywords: propagation, temperature, measurement uncertainty, polynomial

1. WSTĘP

Wzorcowanie czujników temperatury w laboratoriach akredytowanych wykonywane jest w wybranych punktach pomiarowych w zakresie działania danego czujnika. Wyniki wzorcowania pozwalają na zastosowanie czujników do pomiarów w zakresie temperatury pomiędzy najniższą a najwyższą temperaturą w której wzorcowany był czujnik. Jednak w trakcie pomiarów temperatury, leżącej pomiędzy punktami pomiarowymi, nie można w sposób bezpośredni propagować niepewności pomiaru oszacowanej w temperaturach wzorcowania czujnika. Wyznaczenie odpowiedniej niepewności pomiaru możliwe jest poprzez zastosowanie metod interpolacyjnych w oparciu o wyniki wzorcowania.

Referat porusza zagadnienie propagacji niepewności w pomiarach temperatury opierając się o interpolację wielomianową Lagrange'a. Metody interpolacyjne są obszernie opisane w dostępnej literaturze zagranicznej, brakuje jednak polskich opracowań z których mogłyby korzystać laboratoria wzorcujące. Kolejne rozdziały przedstawiają metodę przybliżenia funkcji niepewności w temperaturze innej niż temperatura wzorcowania, z przykładami wyznaczenia niepewności pomiaru dla czujników SPRT, Pt100 oraz termoelementów.

2. INTERPOLACJA LAGRANGE'A

Zgodnie z twierdzeniem Stone'a-Weierstrassa możliwe jest przybliżenie dowolnej funkcji $y=f(x)$ ciągłej o wartościach rzeczywistych wykorzystując wielomiany odpowiednio wysokiego stopnia, jeśli ta funkcja znajduje się w przedziale domkniętym. Metoda interpolacji Lagrange'a pozwala na proste przybliżenie dowolnej funkcji [1]. Posługując się funkcją kwadratową, jako przykładem, wyznaczamy równanie będące formą tej funkcji zaproponowaną przez Lagrange'a:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

Wielomian Lagrange'a stopnia n przyjmuje w $n+1$ punktach zwanych węzłami interpolacyjnymi wartości identyczne z przybliżaną funkcją, co w rezultacie daje nam poniższą postać wielomianu:

$$y(x) = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) \quad (2)$$

funkcje $f_1(x)$, $f_2(x)$ i $f_3(x)$ są wyrażone w następujący sposób:

$$f_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \quad (3)$$

$$f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad (4)$$

$$f_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (5)$$

gdzie x_1 , x_2 i x_3 są węzłami interpolacyjnymi przybliżanej funkcji. Funkcje $f_i(x)$ są tego samego stopnia jak przybliżana funkcja oraz spełniają warunek:

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (6)$$

Ogólna postać wielomianu Lagrange'a wygląda więc następująco:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (7)$$

Spełniając warunek (6) wszystkie wielomiany stopnia 2 lub niższego mogą być przybliżone za pomocą tych samych funkcji (3-5) Lagrange'a. Korzystając z równania (7) można wyznaczyć równanie propagacji niepewności pomiaru dla zmiennych zależnych lub niezależnych. W przypadku zmiennych niezależnych w równaniu uwzględniamy niepewności pomiaru zarówno dla zmiennej x_i jak i x , a w przypadku zmiennych zależnych tylko niepewność pomiaru zmiennej y_i [1].

3. PROPAGACJA NIEPEWNOŚCI POMIARU TEMPERATURY W MST-90

Pomiary rezystancji czujników SPRT pozwalają na określenie temperatury pomiaru poprzez powiązanie rezystancji i temperatury zależnościami opisanymi w Międzynarodowej Skali Temperatury z roku 1990 (MST-90). Związek pomiędzy rezystancją w wybranym punkcie stałym a rezystancją w punkcie potrójnym wody wyrażony jest w formie równania, którego wynik stanowi rezystancja zredukowana W :

$$W = \frac{R_T}{R_{ppw}} \quad (8)$$

Rezystancja zredukowana jest powiązana z wartościami rezystancji zredukowanej odniesienia W_r poszczególnych punktów stałych temperatury zawartych w MST-90 następującym równaniem:

$$W_r(W) = W - \Delta W(W) \quad (9)$$

gdzie funkcja odchylenia $\Delta W(W)$ opisuje różnicę pomiędzy wartością rezystancji zredukowanej uzyskaną w wyniku pomiarów a wartością odniesienia W_r . Poniższy przykład wyznaczenia propagowanej niepewności pomiaru opiera się o funkcję odchylenia MST-90 dla zakresu 0,01 °C do 660,323 °C, Funkcja ta wygląda następująco:

$$W - W_r(W) = a(W-1) + b(W-1)^2 + c(W-1)^3 \quad (10)$$

gdzie współczynniki a, b i c są wyznaczone w trakcie wzorcowania [2]. Funkcja MST-90 może być zapisana w poniższy sposób:

$$W_r(W) = W_{r,ppw} f_{ppw}(W) + W_{r,Sn} f_{Sn}(W) + W_{r,Zn} f_{Zn}(W) + W_{r,Al} f_{Al}(W) \quad (11)$$

gdzie:

$$f_{ppw}(W) = \frac{(W - W_{Sn})(W - W_{Zn})(W - W_{Al})}{(W_{ppw} - W_{Sn})(W_{ppw} - W_{Zn})(W_{ppw} - W_{Al})} \quad (12)$$

$$f_{Sn}(W) = \frac{(W - W_{ppw})(W - W_{Zn})(W - W_{Al})}{(W_{Sn} - W_{ppw})(W_{Sn} - W_{Zn})(W_{Sn} - W_{Al})} \quad (13)$$

$$f_{Zn}(W) = \frac{(W - W_{ppw})(W - W_{Sn})(W - W_{Al})}{(W_{Zn} - W_{ppw})(W_{Zn} - W_{Sn})(W_{Zn} - W_{Al})} \quad (14)$$

$$f_{Al}(W) = \frac{(W - W_{ppw})(W - W_{Sn})(W - W_{Zn})}{(W_{Al} - W_{ppw})(W_{Al} - W_{Sn})(W_{Al} - W_{Zn})} \quad (15)$$

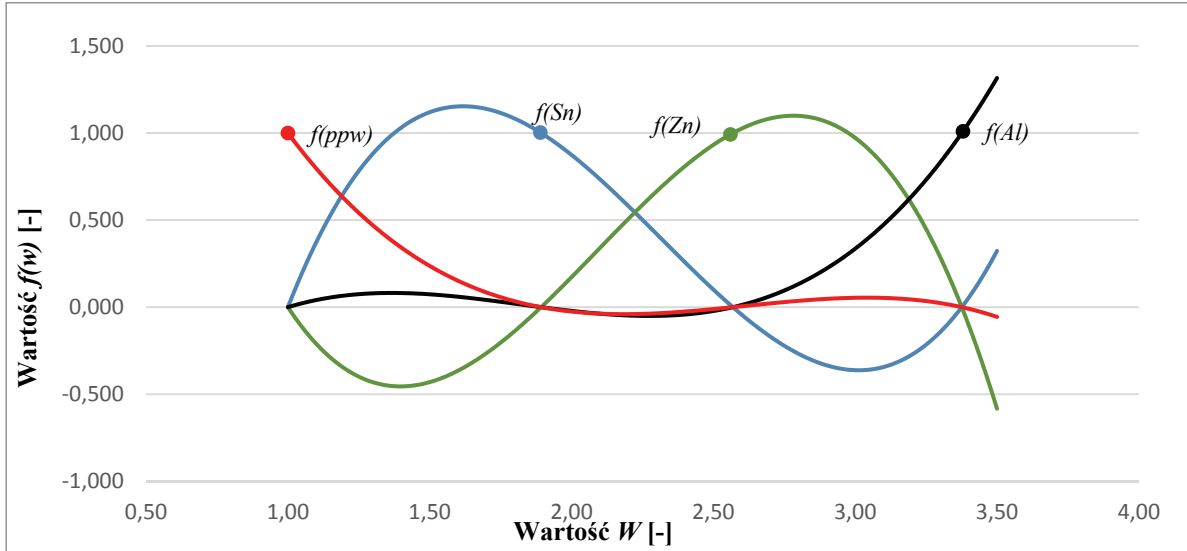
Funkcje interpolacyjne (12-15) w punktach stałych po których są nazwane przyjmują wartość 1, w każdym innym punkcie stałym ich wartość wynosi 0, co ilustruje rys. 1. Wyznaczając funkcje interpolacyjne i korzystając z ogólnej postaci wielomianu Lagrange'a możliwe jest zapisanie funkcji MST-90 (10) jako:

$$W_r(W) = \sum_{i=1}^n W_{r,i} f_i(W) \quad (16)$$

Interpolowana funkcja (16) przechodzi przez n punktów, których położenie zależy od $W_{r,i}$ i W_i , oznacza to że wielomian Lagrange'a jest zależny od $2n+1$ zmiennych:

$$dW_r = \sum_{i=1}^n dW_{r,i} f_i(W) - \sum_{i=1}^n f_i(W) \left(\frac{\partial W_r}{\partial W} \Big|_{W=W_i} \right) dW_i + \frac{\partial W_r}{\partial W} dW \quad (17)$$

gdzie i odnosi się do kolejnych punktów stałych.



Rys. 1. Interpolating functions for the water-aluminium subrange

Równanie (17) jest ogólną formą wyrażenia propagacji niepewności. Uproszczenie równania (17) jest możliwe poprzez podstawienie pod zmienne wartości wynikających z funkcji MST-90. Wszystkie $W_{r,i}$ wyznaczone w trakcie wzorcowania są stałe, co oznacza że zmienna $dW_{r,i}$ jest równa 0. Rezystancja zredukowana w punkcie potrójnym wody zgodnie z równaniem (6) jest równa 1, przez co zmienna dW_{ppw} wynosi 0. Wartość iloczynu zmiennych dW_r/dW w przybliżeniu jest równa 1 i może być pominięta w równaniu (17). Równanie (18) przedstawia uproszczoną formę wyrażenia propagacji niepewności pomiaru temperatury:

$$dW_r \approx dW - \sum_{i=1}^n f_i(W) dW_i \quad (18)$$

równanie propagacji niepewności wygląda więc następująco:

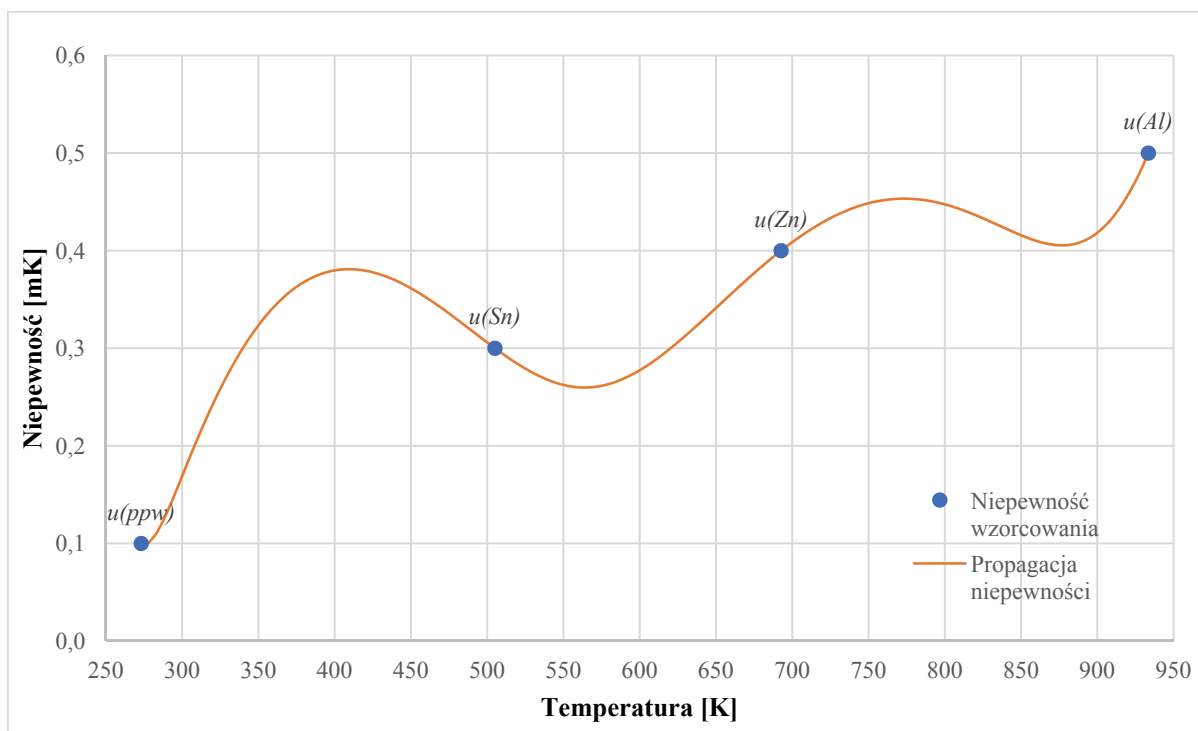
$$u^2(W_r) \approx u^2(W) + \sum_{i=1}^n f_i^2(W) u^2(W_i) \quad (19)$$

Wyznaczone równanie (19) odpowiada równaniu propagacji niepewności dla zmiennych niezależnych, ponieważ pomiary W_i jak i W są obarczone niepewnością pomiaru. Wielkość $u(W)$ to niepewność pomiaru temperatury wykonanego w temperaturze innej niż temperatura punktu stałego. Oszacowanie $u(W)$ wymaga uwzględnienia niepewności związanej ze zmianami zachodzącymi w czujniku SPRT, realizacją mierzonej temperatury, punktu potrójnego wody, oraz niepewnością wynikającą z niedokładności mostka i wzorcowania opornika wzorcowego [3].

Wykres Rys. 2. obrazuje wartości propagowanej niepewności pomiaru temperatury uzyskane z równania (19), funkcja propagowanej niepewności pomiaru przechodzi przez wartości uzyskane w trakcie wzorcowania. Wykorzystując równanie (20) wyznacza się całkowitą niepewność pomiaru w mierzonej temperaturze:

$$u_{total}^2(T) = \left(\frac{dT}{dW} \right)^2 \left[u^2(W_r) + u^2(\Delta W_{SRI}) + u^2(\Delta W_{NU}) \right] \quad (20)$$

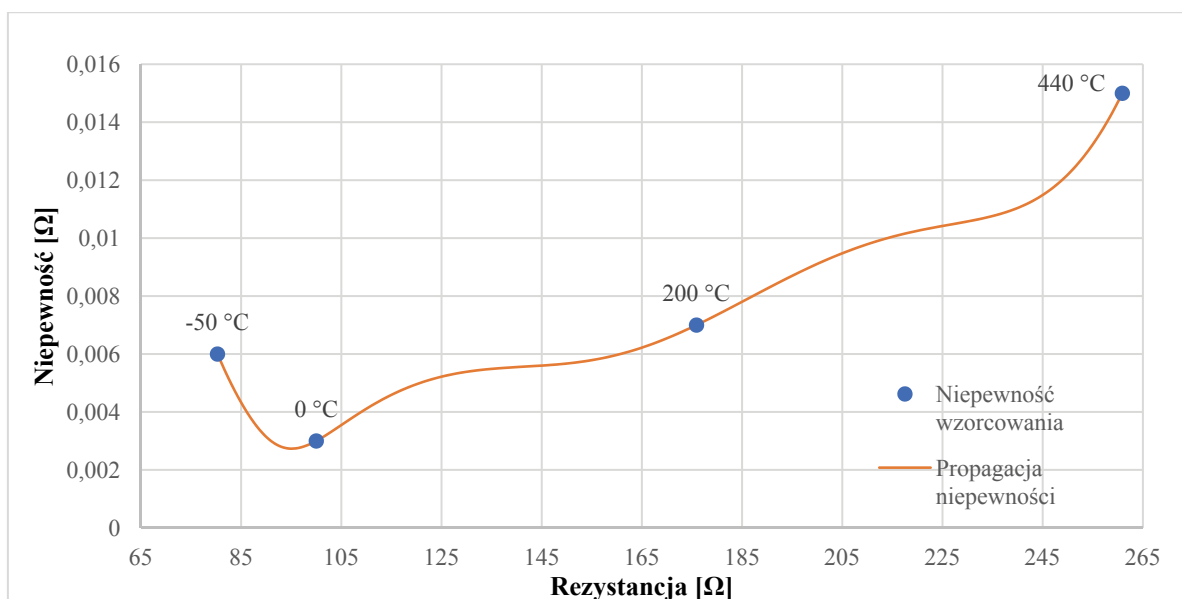
gdzie $u(\Delta W_{SRI})$ i $u(\Delta W_{NU})$ to niepewność wynikająca z błędu skali typu I i III. Różnica pomiędzy równaniami interpolacyjnymi dwóch różnych zakresów temperatury przy użyciu tego samego czujnika SPRT stanowi błąd skali typu I. Błąd skali typu III wynika z różnicy interpolowanej wartości W_r w tym samym zakresie przy użyciu różnych czujników [4].



Rys. 2. Propagation of uncertainty for the water-aluminium subrange

4. INTERPOLACJA WIELOMIANOWA NIEPEWNOŚCI POMIARU INNYCH CZUJNIKÓW TEMPERATURY

Przedstawiona metoda może być wykorzystywana do propagacji niepewności pomiaru także przy użyciu czujników Pt100 i termoelementów. Wykres. Rys. 3. przedstawia funkcję wielomianową propagacji niepewności dla czujnika Pt100 w oparciu o niepewność pomiaru rezystancji. Funkcja wielomianowa pozwoliła na wyznaczenie propagowanej niepewności pomiaru z dużą dokładnością.



Rys. 3. Propagation of uncertainty for Pt100 in temperature range -50 to 440 °C

Na rysunku Rys. 4. obserwujemy propagację niepewności dla wzorcowanego termoelementu typu R, gdzie funkcja propagowanej niepewności pomiaru przechodzi przez punkty stałe cynku, aluminium, srebra i miedzi. Przebieg funkcji propagacji niepewności jest zależny od ilości węzłów interpolacyjnych przez które przechodzi przybliżona funkcja.



Rys. 4. Propagation of uncertainty for R type thermocouple in the Zn-Cu subrange

5. PODSUMOWANIE

Problem wykorzystania niepewności pomiaru uzyskanej w trakcie wzorcowania czujników w temperaturach innych niż temperatury wzorcowania dotyczy głównie klientów laboratoriów akredytowanych. Interpolacja wielomianowa przedstawiona w tym referacie jest prostą do wykorzystania metodą wyznaczania propagowanej niepewności pomiaru, przy zastosowaniu tego samego mostka, opornika oraz komórki punktu potrójnego wody do wszystkich pomiarów. Zastosowanie metody interpolacji Lagrange'a do propagacji niepewności pomiaru pozwala na obliczenie wartości zbliżonych do tych uzyskanych w trakcie wzorcowania, i może być z powodzeniem stosowana do propagowania niepewności pomiaru czujników SPRT, Pt100 oraz termoelementów, również w laboratoriach komercyjnych.

LITERATURA

1. D. R. White, P. Saunders, The propagation of uncertainty with calibration equations, Measurement Science and Technology 18 (2007) 2157-2169, IOP Publishing Ltd, 2007
2. Supplementary Information for the International Temperature Scale of 1990, Sèvres, Bureau International des Poids et Mesures, 1990
3. D. R. White, P. Saunders, The propagation of uncertainty on interpolated scales, with examples from thermometry, Metrologia 37 285-293, 2000
4. D. R. White et al. Uncertainties in the realisation of the SPRT subranges of the ITS-90 BIPM Document CCT/08-19/rev http://www.bipm.org/cc/CCT/Allowed/24.D19_rev_WG3_Doc_rev_10July2009.pdf, 2009