Andrzej ZIĘBA
AGH Kraków
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

PRAWO PROPAGACJI NIEPEWNOŚCI BEZ POCHODNYCH

Użycie różnic skończonych zamiast formalizmu z użyciem pochodnych jest sygnalizowane przez *Przewodnik GUM*. Celem artykułu jest prezentacja „metody algebraicznej" i dyskusja jej zalet w odniesieniu do formalizmu standardowego. W szczególności możliwe jest alternatywne wyprowadzenie reguł składania niepewności dla sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu wielkości wejściowych.

Słowa kluczowe: propagacja, niepewność, różnice skończone, GUM

LAW OF PROPAGATION OF UNCERTAINTIES WITHOUT DERIVATIVES

The use of finite differences instead of standard formalism utilizing partial derivatives was only hinted by *GUM Guide*. Article gives a presentation of this alternative formalism and its advantages. It makes possible, in particular, to derive the well-known rules of propagation of uncertainty for the sum, the product and the ratio of input variables.

Keywords: propagation, uncertainty, finite differences, GUM

1. WSTĘP

Zwykły zapis prawa propagacji niepewności (dla N zmiennych wejściowych x_i) wyraża wzór na niepewność złożoną

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2} \;, \tag{1}$$

który znajdziemy w prawie każdym podręczniku analizy danych.

Nie zmieniając matematycznej treści wzoru (1), *Przewodnik GUM* [1] wprowadził istotne zmiany w sposobie prezentacji prawa propagacji niepewności. Oddzielone zostały dwie odrębne sprawy: obliczanie *udziałów niepewności* przy wykorzystaniu rachunku różniczkowego,

$$u_i(y) = \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| u(x_i) \;, \tag{2}$$

oraz geometryczne składanie udziałów, uzasadnione na gruncie teorii prawdopodobieństwa

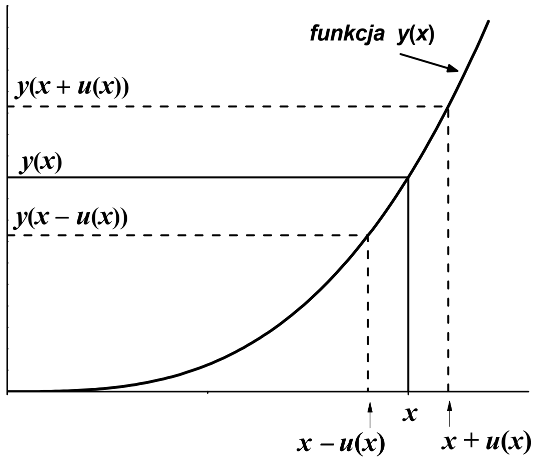
$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \;. \tag{3}$$

Inna innowacja dotyczy obliczania udziałów niepewności. Obok posługiwania się pochodną cząstkową, wskazano na możliwość obliczenia udziałów niepewności wzorem algebraicznym wykorzystującym skończone różnice wartości funkcji:

$$u_i(y) = \frac{1}{2} \left| y(x_1, \ldots, x_i + u(x_i), \ldots, x_N) - y(x_1, \ldots, x_i - u(x_i), \ldots, x_N) \right| . \tag{4}$$

Metoda algebraiczna została jednak tylko wzmiankowana. Odpowiedni wzór znajdujący się w p. 5.3.1 *Przewodnika* pozostaje nienumerowany, a po jego lewej stronie zamiast po prostu symbolu udziału niepewności, znajdujemy niezdefiniowany symbol Z. Może dlatego metoda algebraiczna nie jest przedstawiana w podręcznikach i opracowaniach internetowych dotyczących obliczania niepewności pomiaru. Celem pracy jest dokładniejsze przedstawienie tego alternatywnego formalizmu i zbadanie jego właściwości.

Praca powstała w związku z udziałem autora w opracowaniu *Rekomendacji PTF nt metod nauczania analizy wyników doświadczeń w nauczaniu szkolnym* [2]. Nauczanie zasad propagacji niepewności w szkole dotyczy tylko poziomu rozszerzonego fizyki w liceum/technikum, ale i tam nie można odwoływać się do, nieznanego uczniom, pojęcia pochodnej. Niniejszy artykuł wykorzystuje materiał przedstawiony w artykule dydaktycznym [3].



Rys. 1. Ilustracja prawa propagacji niepewności na przykładzie funkcji $y = x^3$

2. PORÓWNANIE METODY ALGEBRAICZNEJ Z FORMALIZMEM WYKORZYSTUJĄCYM RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Wzór (2) jest intuicyjnie zrozumiały. Bez ograniczenia ogólności omówić go można na przykładzie funkcji jednej zmiennej $y(x)$, w powiązaniu z rys. 1. Powiększenie zmiennej wejściowej x o niepewność $u(x)$ powoduje (dla rosnącej funkcji $f(x)$) powiększenie zmiennej wyjściowej o różnicę $y(x + u(x)) - y(x)$. Analogiczne zmniejszenie wartości x o niepewność $u(x)$ pomniejsza zmienną wyjściową o wartość $y(x) - y(x - u(x))$. Nie wiemy, czy błąd pomiaru prowadzi do powiększenia czy też obniżenia wartości y w stosunku do nieznanej wartości rzeczywistej, zatem rozsądnie jest przyjąć za $u(y)$ wartość średniej arytmetycznej obydwu różnic. Symbol wartości bezwzględnej we wzorze (4) jest potrzebny, by niepewność $u(y)$ pozostała liczbą dodatnią również wtedy, gdy funkcja $y(x)$ jest malejąca.

Obydwa formalizmy dają wyniki w pełni identyczne dla liniowej funkcji pomiaru $y(x) = ax + b$. W przypadku nieliniowej funkcji pomiaru prawo przenoszenia niepewności, czy to z wykorzystaniem pochodnych, czy też metody algebraicznej, jest przybliżeniem wystarczającym w większości wypadków. Uzasadnionym w szczególności tym, że nie warto silić się na dokładność w sytuacji, gdy samą wartość niepewności znamy bardzo niedokładnie.

Prawo przenoszenia niepewności z wykorzystaniem pochodnych zasadza się na zastąpieniu nieliniowej funkcji pomiaru $y(x)$ przez przybliżenie liniowe, $y(x) = y(x_0) + \left(dy/dx\right)\big|_{x=x_0}(x - x_0)$.

Wzór algebraiczny (4) można z kolei rozumieć też jako przybliżenie liniowe, ale zdefiniowane przy pomocy różnic skończonych. Przy czym symetryczny charakter wzoru (4) eliminuje wiodącą nieliniowość drugiego rzędu. Dlatego jest bardziej dokładny od jeszcze prostszej formuły

$$u(y) = \left| y(x + u(x)) - y(x) \right| . \tag{5}$$

Zbadajmy to numerycznie na przykładzie funkcji $y = x^3$ i przesadnie dużej wartości niepewności względnej $u(x)/x = 0{,}1$, dla $x = 1$ (czyli jak na rys. 1). Uzyskujemy:

a) z wzoru z pochodnymi (3) wartość $u(y) = 0{,}300$,

b) wzór algebraiczny (4) daje wynik $u(x) = 0{,}301$,

c) przy użyciu „niesymetrycznego” wzoru (5) wartość $u(x) = 0{,}331$.

Biorąc pod uwagę zasadę, że niepewność zaokrąglamy do, co najwyżej, dwóch miejsc znaczących, pierwsze dwa wyniki są równoważne.

W przypadku nieliniowej funkcji pomiaru formalizmem poprawnym w każdej sytuacji jest metoda propagacji rozkładów prawdopodobieństwa, będąca głównym tematem *Suplementu 1* [4]. Powstaje pytanie, jakie przyjąć kryterium potrzeby stosowania tego niełatwego formalizmu, wymagającego stosowania metody Monte Carlo. Prostym kryterium jest porównanie skończonych różnic: $y(x + u(x)) - y(x)$ oraz $y(x) - y(x - u(x))$. Gdy różnice te są różne, np. na poziomie dwóch cyfr znaczących, nieliniowość funkcji jest istotna. Należy zastanowić się wtedy, czy nie trzeba stosować metody propagacji rozkładów. Standardowy formalizm z wykorzystaniem pochodnych kryterium takiego nie dostarcza.

3. PRAWO PROPAGACJI NIEPEWNOŚCI DLA ILOCZYNU I ILORAZU ZMIENNYCH WEJŚCIOWYCH

Wzór (4) bywa traktowany jako li tylko jako algorytm do obliczeń numerycznych. Tymczasem umożliwia również *wyprowadzenie* – bez użycia rachunku różniczkowego – ważnych przypadków szczególnych. Pokażmy wyprowadzenie dla funkcji pomiaru w postaci iloczynu dwóch zmiennych wejściowych,

$$y(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 . \tag{6}$$

Obliczenie udziału niepewności dla pierwszej zmiennej wygląda następująco:

$$u_1(y) = \frac{\left| [x_1 + u(x_1)] \cdot x_2 - [x_1 - u(x_1))] \cdot x_2 \right|}{2} = \left| x_2 \, u(x_1) \right| . \tag{7}$$

W taki sam sposób obliczamy $u_2(y) = \left| x_1 \, u(x_2) \right|$. Geometryczne sumowanie udziałów daje

$$u(y) = \sqrt{[x_2 \, u(x_1)]^2 + [x_1 \, u(x_2)]^2} . \tag{8}$$

Obliczamy następnie złożoną niepewność względną

$$\frac{u(y)}{y} = \frac{\sqrt{[x_2 \, u(x_1)]^2 + [x_1 \, u(x_2)]^2}}{x_1 \, x_2} = \sqrt{\left[\frac{u(x_1)}{x_1}\right]^2 + \left[\frac{u(x_2)}{x_2}\right]^2} . \tag{9}$$

Udowodniliśmy, że *w przypadku iloczynu wielkości wejściowych, geometrycznemu sumowaniu podlegają niepewności względne*.

Dla sumy i różnicy analogiczne wyprowadzenie jest jeszcze prostsze. Wyprowadzenie dla ilorazu, tj. funkcji pomiaru $y(x_1, x_2) = x_1 / x_2$, jest nieco trudniejsze niż dla iloczynu, gdyż trzeba dodatkowo wykorzystać przybliżenie $\frac{1}{1+t} \cong 1 - t$, słuszne dla wartości bezwymiarowej zmiennej $t = \left| u(x_i) / x_i \right|$ znacznie mniejszej od jedności.

4. PODSUMOWANIE

W artykule omówiono formalizm algebraiczny prawa propagacji niepewności. Powinien być szarzej wykorzystywany niż dotychczas, ze względu na szereg zalet:

a) wzór metody jest intuicyjnie łatwiej zrozumiały niż formalizm standardowy,

b) jest alternatywą dla osób nie znających rachunku różniczkowego,

c) może być stosowany, gdy funkcja pomiaru jest zdefiniowana przez nieznany użytkownikowi program komputerowy lub jest na tyle złożona, że obliczenie pochodnej staje się niepraktyczne,

d) porównanie różnic $y(x + u(x)) - y(x)$ oraz $y(x) - y(x - u(x))$ dostarcza ilościowego kryterium, czy funkcja pomiaru jest istotnie nieliniowa,

e) formalizm algebraiczny umożliwia wyprowadzenie reguł składania niepewności dla funkcji pomiaru w postaci sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu wielkości wejściowych.

LITERATURA

1. JCGM 100:2008.: Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement.
2. Natorf W., Zięba A., Grabski J., Majhofer A., Molenda T., Mostowski J.:. *Rekomendacja PTF na temat metod analizy wyników pomiarów w nauczaniu szkolnym*. Referat na 44. Zjeździe Fizyków Polskich we Wrocławiu, 10–15 IX 2017. Streszczenie na str. 86 książki konferencyjnej.
3. Zięba A.: Prawo przenoszenia niepewności bez pochodnych. *Foton* **139** (2017 zima), s. 15–22.
4. JCGM 101:2008.: Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method.